École Nationale Supérieure des Arts et Industries Textiles (ENSIAT)
Épreuve de Mathématiques 1
Session 1992

—————

Un corrigé

I

Exercice

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on écrit successivement :

$$\begin{aligned} U_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k v_k &= \varepsilon_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k (V_k - V_{k-1}) \\ &= \varepsilon_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k V_k - \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{k+1} V_k \\ &= \varepsilon_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}\right) V_k - \varepsilon_1 V_0 + \varepsilon_n V_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) V_k + \varepsilon_n V_n . \end{aligned}$$

2. Puisque $|V_k| \leq M$ et que $\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1} \geq 0$, on trouve $|w_k| \leq M(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})$. La série télescopique $\sum_{n \in \mathbf{N}} (\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1})$ étant convergente puisque la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge, donc par comparaison la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} w_n$ converge absolument donc elle converge.

3. Notons $W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$. On a $U_n = W_{n-1} + \varepsilon_n V_n$. La suite $(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$ étant bornée et $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers 0, elle est de même la suite de terme général $\varepsilon_n V_n$. Ainsi la suite de somme partielle associé à la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} u_n$ converge.

4. En utilisant les questions précédentes, il suffit de prouver que la suite $(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\alpha)$$

est bornée. Pour cela, on écrit $\sin(k\alpha) = \Im m(e^{ik\alpha})$ et on utilise la somme d'une série trigonométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(k\alpha) = \Im m \left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\alpha} \right).$$

Mais on a, $e^{i\alpha} \neq 1$ pour $\alpha \in]0, 2\pi[$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} e^{ik\alpha} &= \frac{1 - e^{i(n+1)\alpha}}{1 - e^{i\alpha}} \\ &= \frac{e^{i\frac{(n+1)}{2}\alpha}}{e^{\frac{i\alpha}{2}}} \times \frac{e^{\frac{-i(n+1)\alpha}{2}} - e^{\frac{i(n+1)\alpha}{2}}}{e^{\frac{-i\alpha}{2}} - e^{\frac{i\alpha}{2}}} \\ &= e^{\frac{in\alpha}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Revenant à V_n, on trouve, pour $\alpha \in]0, 2\pi[$,

$$V_n = \frac{\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Ceci est bien bornée indépendamment de n par $\dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|}$.

Problème

II

1. (a) D'après la règle de D'Alembert, $R = 1$.
   (b) Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\left|\dfrac{x^n}{n(n-1)}\right| \leq \dfrac{1}{n(n-1)}$ et la série $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{n(n-1)}$ converge. Donc $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{x^n}{n(n-1)}$ converge simplement sur $[-1, 1]$, en particulier en 1 et -1
2. f est une fonction définie par une série entière de rayon de convergence $R = 1$, donc f est indéfiniment dérivable sur $]-1, 1[$. L'inégalité $x \in [-1, 1]$, $\left|\dfrac{x^n}{n(n-1)}\right| \leq \dfrac{1}{n(n-1)}$, montre que la série $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{x^n}{n(n-1)}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ et comme les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^n}{n(n-1)}$ sont continues alors f est continue sur $[-1, 1]$.
3. Par dérivation terme à terme, on obtient $\forall x \in]-1, 1[$, $f'(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{n-1}$ et $f''(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} x^{n-2}$. Donc $\forall x \in]-1, 1[$, $f''(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et puis $f'(x) = -\ln(1-x) + c$, comme $f'(0) = 0$ alors $f'(x) = -\ln(1-x)$. Finalement, $f(x) = -\displaystyle\int \ln(1-x)\mathrm{d}x = (1-x)\ln(1-x) + x + \mu$. Mais $f(0) = 0$, donc $f(x) = (1-x)\ln(1-x) + x$.
4. f étant continue sur $[-1, 1]$ et coïncide avec $x \mapsto (1-x)\ln(1-x) + x$, d'où :

$$S_1 = f(1) = \lim_{x\to 1, x<1} f(x) = \lim_{x\to 1, x<1} (1-x)\ln(1-x) + x = 1.$$

De même,

$$S_2 = f(-1) = \lim_{x\to -1, x>-1} f(x) = \lim_{x\to 1, x<1} (1-x)\ln(1-x) + x = 2\ln 2 - 1.$$

III

1. (a) $R = 1$ d'après la règle de D'Alembert.
   (b) La série diverge pour $x = 1$ et pour $x = -1$, la série converge d'après le critère spécial des séries alternées.
2. (a) g est une fonction de la variable t définie par une série entière de rayon de convergence 1, donc elle est dérivable en particulier sur $]0, 1[$ et $g'(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} t^{4n-2}$. Ainsi,

$$\forall t \in]0, 1, \quad g'(t) = \frac{1}{t^2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(t^4\right)^n = \frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{1-t^4} - 1\right) = \frac{t^2}{1-t^4}$$

   Donc $a = 1$ et $b = 0$.
   (b) Par décomposition en éléments simples, $g'(t) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{1-t} + \dfrac{1}{1+t}\right) - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+t^2}$, d'où

$$g(t) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - \frac{1}{2}\arctan(t) + \lambda$$

   où λ est une constante. Comme $g(0) = 0$, alors $\lambda = 0$.

(c) Pour $x \in]0,1[$, on a $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4n-1} = -1 + \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{4n-1}}{4n-1} = -1 + \frac{1}{t}g(t) = -1 + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}g\left(\sqrt[4]{x}\right)$. D'où :

$$\forall x \in]0,1[,\quad f(x) = -1 + \frac{1}{4\sqrt[4]{x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt[4]{x}}\right) - \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\arctan\left(\sqrt[4]{x}\right).$$

3. Pour $x \in]-1,0[$, on pose $x = -t^4$ où $t \in]0,1[$ et $h(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{4n-1}}{4n-1}$. Comme précédemment, h est dérivable sur $]0,1[$ et

$$\forall t \in]0,1[,\ h'(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n t^{4n-2} = \frac{1}{t^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-t^4)^n = -\frac{t^2}{1+t^4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{t}{t^2+t\sqrt{2}+1} - \frac{t}{t^2-t\sqrt{2}+1}\right).$$

D'où,

$$h(t) = -\int \frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(t\sqrt{2}+1\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(t\sqrt{2}-1\right) + \mu$$

où μ est une constante. Comme $h(0)=0$, alors $\mu = 0$.
Pour $x \in]0,1[$, on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4n-1} = -1 + \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{4n-1}}{4n-1} = -1 + \frac{1}{t}h(t) = -1 + \frac{1}{\sqrt[4]{-x}}h\left(\sqrt[4]{-x}\right).$$

4. (a) Il est clair que f est continue sur $]-1,1[$ comme fonction définie par une série entière. D'autre part, si $x \in [-1,0[$, on pose $x=-t$, donc la série en question s'écrit $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{(-1)^n t^n}{4n-1}$. Donc pour $t \in]0,1]$ la série est alternée et convergente, de plus on a l'inégalité :

$$\forall t \in [-1,0[,\quad \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^n}{4n-1}\right| \le \frac{|t|^{n+1}}{4n+3} \le \frac{1}{4n+3}$$

Donc on a la convergence uniforme sur $[-1,0[$, donc f est continue sur $[-1,0[$.

(b) En utilisant la continuité de f au point $x=-1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
S_3 &= f(-1) = \lim_{x\to -1, x>-1} f(x) \\
&= \lim_{x\to -1, x>-1}\left[-1 + \frac{1}{\sqrt[4]{-x}}h\left(\sqrt[4]{-x}\right)\right] \\
&= -1 - \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}+1\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}-1\right) \\
&= -1 - \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}+1\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) \\
&= -1 - \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}+1\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\sqrt{2}+1\right)\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) - \frac{8+\pi\sqrt{2}}{8}.
\end{aligned}$$

•••••••••••